22-10-20

- **<u>Η εξίσωση Bernoulli:</u>**

$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)y^r(t)$, $t \in I$ $(r \neq 0, 1)$, $a, b \in C(I)$

Η αντικατάσταση $z = y^{1-r}$, $y \neq 0$ μετασχηματίζει την εξίσωση σε μία εξίσωση πρώτης τάξης.

Πχ (ΑΣ-4, σελ. 36)

$xy' + y = -2x^2y^2$, $x > 0$.

Είναι $r = 2$ και για $z = y^{1-r} = y^{-1}$, έχουμε: $z' = -y^{-2}y'$ και

$xy' + y = -2x^2y^2 \Rightarrow xy'y^{-2} + y^{-1} = -2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -xz' + z = -2x^2$

$\Rightarrow \left(\frac{z}{x}\right)' = 2$

$\Rightarrow z(x) = 2x^2 + cx.$

απ' όπου $y(x) = \dfrac{1}{2x^2 + cx}$

Για την λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 1$, βρίσκουμε:

$1 = y(1) = \dfrac{1}{2 \cdot 1^2 + c \cdot 1} \Rightarrow 2 + c = 1 \Rightarrow c = -1$

Δηλαδή, είναι: $y(x) = \dfrac{1}{2x^2 - x}$, $x \in (0, 2)$

Παρατήρηση: Αν $a(t) = a$, $b(t) = b$, $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$y'(t) + ay(t) = by^r(t) \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = by^r - ay \Rightarrow \dfrac{dy}{by^r - ay} = dt$

<u>Εφαρμογή:</u> (Η λογιστική εξίσωση)

Να βρεθεί η λύση του π.α.τ.: $y'(t) = ay(t) - by^2(t)$, $y(0) = c$, $t \geq 0$ $(a, b > 0$, $c \geq 0)$ και να αποδειχθεί ότι

α) Για $c > 0$ είναι $\lim_{t \to \infty} y(t) = a/b$

β) Για $c = 0$ είναι $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$

Λύση: Εχουμε $y'(t) = ay(t) - by^2(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = ay - by^2 \Rightarrow \frac{dy}{ay - by^2} = dt$.

και για $k = b/a$ παίρνουμε:

$$\int \frac{dy}{ay - by^2} = \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{ay(1-ky)} dy = \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{y} + \frac{k}{1-ky} \right) dy = t + c \Rightarrow \log\left(\frac{y}{1-ky} \right) = at + c$$

απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\frac{y}{1-ky} = Ce^{at} \Rightarrow \frac{1-ky}{y} = Ce^{-at} \Rightarrow \frac{1}{y} = k + Ce^{-at} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{k + Ce^{-at}}$$

(με $C>0$), δηλαδή είναι: $y(t) = \frac{a}{b + Cae^{-at}}$

Παρατηρείστε ότι η λύση που ικανοποιεί την συνθήκη $y(0) = c = 0$ είναι η μηδενική λύση ($y=0$) και δεν περιέχεται στην γενική λύση.

Άσκηση: Προκειμένου να μελετήσουμε την εξέλιξη ενός πληθυσμού σε μία απαιτία που νοσεί, υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής του αριθμού των ατόμων που νοσούν την χρονική στιγμή t είναι ανάλογος τόσο του πληθυσμού των νοσούντων την χρ. στιγμή $t=0$ έχει νοσήσει το κλάσμα $p \in (0,1)$ του πληθυσμού ενώ μετά από χρονικό διάστημα T έχει νοσήσει το κλάσμα $q \in (p,1)$ του πληθυσμού. Να βρεθεί η συνάρτηση που περιγράφει την εξέλιξη της νόσου στον χρόνο.

Εφαρμογή: $p = 1/9$, $q = 1/2$, $T = 6$ μήνες.

Άσκηση: 6ν, σελ. 37, $y(0) = 1$

ii) + 2.

- **Η εξίσωση Riccati:**

$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) + d(x) = 0$, $t \in I$, $a,b,d \in C(I)$, $d \neq 0$

Αν y_1 είναι μία (μερική) λύση της εξίσωσης Riccati, τότε η αντικατάσταση $z = \frac{1}{y - y_1} \Leftrightarrow y = y_1 + \frac{1}{z}$

μετασχηματίζει την εξίσωση Riccati σε μία γρ. εξίσωση $1^{ης}$ τάξης.

Πράγματι, είναι:

$y_1'(t) + a(t)y_1(t) + b(t)y_1^2(t) + d(x) - \frac{z'}{z^2} + a(t)\frac{1}{z} + \frac{2y_1 b(t)}{z} + \frac{1}{z^2}b(t) = 0$

απ' όπου $z' - [a(t) + 2y_1 b(t)]z = b(t)$.

Πχ (2, σελ. 35)

Να επιλυθεί η εξίσωση: $y' - y + e^{-x}y^2 - e^x = 0$, αφού πρώτα βρεθεί μία λύση της μορφής $y_1 = ke^{\lambda x}$.

Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση y_0 με $y_0(0) = 1/3$.

Λύση: Με αντικατάσταση έχουμε: $(ke^{\lambda x})' - ke^{\lambda x} + e^{-x}k^2 e^{2\lambda x} - e^x = 0$

απ' όπου προκύπτει $k\lambda e^{\lambda x} - ke^{\lambda x} + e^{-x}k^2 e^{2\lambda x} - e^x = 0$

$\Rightarrow [k(\lambda-1)e^{(\lambda-1)x} + k^2 e^{2(\lambda-1)x} - 1]e^x = 0$

$\Rightarrow k(\lambda-1)e^{(\lambda-1)x} + k^2 e^{2(\lambda-1)x} - 1 = 0$, $x \in I$

A) Παρατηρούμε ότι για $\lambda = 1$ είναι: $k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = 1, -1$

και συνεπώς μία λύση της εξίσωσης είναι η $y_1 = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

B) Για $x = 0$ παίρνουμε: $k(\lambda - 1) + k^2 - 1 = 0$

η οποία ικανοποιείται για $k = 1 = \lambda$.

Για $y = e^x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = e^x - \frac{z'}{z}$ έχουμε:

$z' - z = e^{-x} \Rightarrow e^{-x}z' - e^{-x} = e^{-2x}$

$\Rightarrow (ze^{-x})' = e^{-2x}$

$\Rightarrow ze^{-x} = \frac{-1}{2}e^{-2x} + c$

και $z(x) = ce^x - \frac{1}{2}e^{-x}$.

Επομένως, $y(x) = e^x + \dfrac{1}{ce^x - \frac{1}{2}e^{-x}}$

απ' όπου για $x=0$, $y(0)=1/3$ προκύπτει $c=-1$ και συνεπώς:
$y_0(x) = e^x - \dfrac{2}{2e^x + e^{-x}}$

Παρατηρήσεις: • $y(0)=1$, • $y(0)=2$.

<u>Άσκηση 5ί, σελ. 36</u>:
$y' - xy^2 - \frac{1}{x}y + x^3 = 0$, $y_1 = ax+b$.

Είναι $a - x(ax+b)^2 - (1/x)(ax+b) + x^3 = 0$
$\Rightarrow ax - x^2(ax+b)^2 - (ax+b) + x^4 = 0$
$\Rightarrow ax - x^2(ax^2 + 2abx + b^2) - (ax+b) + x^4 = 0$
$\Rightarrow ax - ax^4 - 2abx^3 - b^2x^2 - ax - b + x^4 = 0$
$\Rightarrow (1-a)x^4 - 2abx^3 - b^2x^2 - b = 0$
$\Rightarrow a=1,\ b=0$

Προσοχή: $a - (a+b)^2 - (a+b) + 1 = 0 \Rightarrow -(a+b)^2 - b + 1 = 0 \Rightarrow b=1, a=-1$??

- **<u>Ελλιπείς Εξισώσεις</u>**
- Εξισώσεις που δεν περιέχουν την: $y^{(n)} = f(y', \dots, y^{(n-1)}) \to z = y'$

<u>Άσκηση 3(ί)</u>: $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$, $y(2)=0$, $y'(2)=1$
Για $z=y'$ βρίσκουμε: $xz' + xz^2 - z = 0 \Rightarrow xz' - z = -xz^2$
που είναι μία εξίσωση Bernoulli με $r=2$.
Επίσης, είναι:
$xz' + xz^2 - z = 0$
$\Rightarrow xz' - z = -xz^2$
$\Rightarrow \dfrac{z - xz'}{z^2} = -x$
$\Rightarrow \dfrac{x}{z} = -\dfrac{x^2}{2} + c \Rightarrow \dfrac{x}{-\frac{x^2}{2} + c} = z$

και $y' = \dfrac{x}{c - \frac{x^2}{2}}$ $\quad y = \displaystyle\int \frac{x}{c - \frac{x^2}{2}} dx + c_1 = -\ln\left| -\frac{x^2}{2} + c \right| + c_1.$

• Εξισώσεις που δεν περιέχουν : $y'' = f(y, y') \rightarrow y' = z$

Είναι: $y' = z \Rightarrow y'' = \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dt} = z \cdot \dfrac{dz}{dy}$

και συνεπώς, $y'' = f(y, y') \Rightarrow z \cdot \dfrac{dz}{dy} = f(y, z)$

Άσκηση 2(iv): $y'' = 2yy'$

Για $y' = z$ και $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ έχουμε για $z \neq 0$:

$z \cdot \dfrac{dz}{dy} = 2yz \Rightarrow \dfrac{dz}{dy} = 2y \Rightarrow z = y^2 + c \Rightarrow y' = y^2 + c.$

και συνεπώς:

- Για $c = 0$, $y' = y^2 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = x + c_1 \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + c_1 \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x + c_1}$
- Για $c > 0$, $y' = y^2 + c \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + a^2} = x + c_1 \Rightarrow \frac{1}{a} \mathrm{Arctg}(y/a) = x + c_1$
- Για $c < 0$, $y' = y^2 - a^2 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^2 - a^2} = x + c_1 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{y - a}{y + a} = x + c_1 = \dots$

Άσκηση 2(i): $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$

Για $y' = z$ και $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$, έχουμε για $zy \neq 0$:

$yz\dfrac{dz}{dy} - z^2 = y^2 z \Rightarrow y\dfrac{dz}{dy} - z = y^2$

$\Rightarrow \dfrac{y\frac{dz}{dy} - z}{y^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{d}{dy}\dfrac{z}{y} = 1 \Rightarrow z = y^2 + c_1 y.$

και συνεπώς: $\frac{dy}{dz} = y' = y^2 + c_1 y \Rightarrow \ldots$

- **Οι εξισώσεις Lagrange και Clairaunt.**

• Η εξίσωση Clairaunt: $y = ty' + f(y')$

Για $z = y' \Rightarrow y'' = z\frac{dz}{dy}$ με παραγώγιση βρίσκουμε:

$y = ty' + f(y')$

$\Rightarrow y' = y' + ty'' + f'(y')y''$

$\Rightarrow z = z + tz\frac{dz}{dy} + f'(z)z\frac{dz}{dy}$

$\Rightarrow tz\frac{dz}{dy} + f'(z)z\frac{dz}{dy} = 0$

$\Rightarrow [tz + f'(z)\cdot z]\frac{dz}{dy} = 0$, απ' όπου $\frac{dz}{dy} = 0$ και $t + f'(z) = 0$

Από την πρώτη σχέση έχουμε $y' = c$ ενώ από την δεύτερη βρίσκουμε $y = -f'(z)y' + f(y') \Rightarrow y = -f'(z)z + f(z)$.

Άσκηση: $y = ty' + 2(y')^2$.

Έχουμε: $y' = ty'' + y' + 4y'y''$

$\Rightarrow z = tz\frac{dz}{dy} + z + 4zz\frac{dz}{dy} = 0$

$\Rightarrow 0 = z(t + 4z)\frac{dz}{dy}$

$\Rightarrow z = 0$ και $\frac{dz}{dy} = 0$ και $t + 4z = 0$

απ' όπου παίρνουμε $y(t) = c$ ή $y'(t) = z = c \Rightarrow y(t) = ct + c_1$

και $y = -4zy' + 2(y')^2 \Rightarrow y = -4zz + 2(z)^2 = -2(z)^2 \Rightarrow y = -2(y')^2$

Αντικαθιστώντας την $y(t) = ct + c_1$ στην αρχική, παίρνουμε:

$ct + c_1 = tc + 2(c)^2 \Rightarrow c_1 = 2(c)^2 \Rightarrow y(t) = ct + 2(c)^2$.

Οι λύσεις της $y = -2(y')^2$ προκύπτουν με ολοκλήρωση.

• Η εξίσωση Lagrange: $y = tg(y') + f(y')$

Για $z = y' \Rightarrow y'' = z \frac{dz}{dy}$ με παραγώγιση βρίσκουμε:

$$y' = g(y') + tg'(y')y'' + f'(y')y''$$
$$\Rightarrow z = g(z) + [tg'(y') + f'(z)]z\frac{dz}{dy}$$
$$\Rightarrow z - g(z) = [tg'(z) + f'(z)]\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$$
$$\Rightarrow z - g(z) = [tg'(z) + f'(z)]\frac{dz}{dt}$$
$$\Rightarrow [z - g(z)]\frac{dt}{dz} - g'(z)t = f'(z)$$

που είναι μία εξίσωση πρώτης τάξης.

(HW): <u>Άσκηση</u>: $y = t(y')^2 + (y')^2$.

• **<u>Πλήρεις Εξισώσεις (Αμέσως Ολοκληρώσιμες)</u>.**

$$y'(x) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \Rightarrow g(x,y)\,dy = f(x,y)\,dx$$

Θα λέμε ότι η εξίσωση: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ είναι αμέσως ολοκληρώσιμη αν $\exists$ μία συνάρτηση $f(x,y)$ τ.ω. $df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$.

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$: Είναι $df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$

$\boxed{\text{Πρόταση}}$: Υπάρχει μία συνάρτηση f τέτοια ώστε $df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ αν και μόνο αν οι συναρτήσεις M, N είναι C^1 σε ένα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ ισχύει

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

(πχ) $y'(x) = -\frac{x+y\cos x}{\sin x}$

Η εξίσωση γράφεται $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y\cos x}{\sin x} \Rightarrow (x+y\cos x)dx + \sin x\, dy = 0$

Για $M(x,y) = x+y\cos x$, $N(x,y) = \sin x$ βρίσκουμε.

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(x+y\cos x)}{\partial y} = \cos x$

$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x$

και συνεπώς η εξίσωση είναι αμέσως ολοκληρώσιμη. Έχουμε:

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \Rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (x+y\cos x)\,dx = \frac{x^2}{2} + y\sin x + g(y)$

Θα πρέπει:

$N(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{x^2}{2} + y\sin x + g(y)\right)}{\partial y} = \sin x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g = c$

Επομένως, $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y\sin x + c$.

Άλλοι τρόποι: $f(x,y) = \int N(x,y)\,dx = \int (\sin x)\,dx = \cos x + h(x) \Rightarrow \ldots$

- **Ολοκληρωτικός Παράγοντας.**

Αν για την εξίσωση: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$
υπάρχει συνάρτηση $\phi(x,y)$ τ.ω. η εξίσωση:
$\phi(x,y)M(x,y) + \phi(x,y)N(x,y) = 0$ να είναι άμεσα ολοκληρώσιμη
τότε λέμε ότι η $\phi(x,y)$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης.

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις}}$:

- $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x) \rightarrow \phi(x) = e^{\int p(x)dx}$

• $\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = p(y) \rightarrow \phi(y)=e^{\int p(y)dy}$

Απόδειξη: Άμεσα με αντικατάσταση και παραγώγιση.

Άσκηση 3(i): $xy\,dx + (x^2+y^2+y)\,dy = 0$

Είναι $M(x,y)=xy$, $N(x,y)=x^2+y^2+y$ και

$\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial (xy)}{\partial y} = x$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial (x^2+y^2+y)}{\partial x} = 2x$

και $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \dfrac{x-2x}{x^2+y^2+y}$

$\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = \dfrac{2x-x}{xy} = \dfrac{1}{y} = p(y) \rightarrow \phi(y)=e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\log y} = y$

και συνεπώς η εξίσωση: $xy^2dx+(yx^2+y^3+y^2)dy=0$

είναι αμέσως ολοκληρώσιμη.

Έχουμε: $f(x,y)=\int (yx^2+y^3+y^2)\,dy = \dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{y^3}{3}+g(x)$

$f(x,y)=\int xy^2dx = \dfrac{x^2y^2}{2}+h(y)$

και συνεπώς $h(y)=\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{y^3}{3}+c$.

απ' όπου έχουμε ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται

από την σχέση:

$f(x,y)=C \Rightarrow \dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}+\dfrac{y^3}{3}=C.$

Άσκηση 6, σελ. 48.: Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας ρ της εξίσωσης $(4x^{-4}y^2 - 2x^{-2}y)dx + (3x^{-3}y + x^{-1})dy = 0$ της μορφής $\rho(x,y) = x^m y^n$, m,n ακέραιοι

Υπόδειξη: Θα πρέπει η εξίσωση:
$(4x^{m-4}y^{2+n} - 2x^{m-2}y^n)dx + (3x^{m-3}y^n + x^{m-1})dy = 0$
να είναι άμεσα ολοκλ/μη.

Άσκηση: Για την εξίσωση $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ισχύει ότι:

(A) Αν $\dfrac{M_y - N_x}{yN - xM} = \varphi(xy)$ τότε η συνάρτηση $\Phi(xy)$ όπου
$\Phi(u) = e^{\int \varphi(u)du}$ είναι ένας ολοκ. παράγοντας της εξίσωσης.

(B) Η εξίσωση $(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2) + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)y' = 0$ έχει ολοκληρωτικό παρ/ντα.

(C) Υπαρχει ολοκλ. παρ/ντας της εξίσωσης της μορφής $x^k y^m e^{\lambda xy}$, $k,m,\lambda \in \mathbb{R}$

E) Κανένα από τα παραπάνω.